SF1624 Algebra och geometri

Nionde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

11 november, 2009

Linjära ekvationssystem

Definition (Linjärt ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem i n obekanta, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, är ett ekvationssystem som går att skriva

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & +\cdots+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & +\cdots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

där $a_{i,j}$ är konstanter för $i = 1, 2, \ldots, m$ och $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exempel

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{och} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 5y & = & 3 \\ 3x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & -1 \end{array}\right.$$

Linjära ekvationssystem med matriser

Vi kan använda matriser till linjära ekvationssystem på två sätt. Det första är att skriva ekvatinssystemet som

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exempel

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Linjära ekvationssystem med totalmatris

Det andra sättet att använda matriser är som totalmatris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Exempel

$$\left\{\begin{array}{rl} x - 2y + z & = 3 \\ 3x + 2y - z & = 1 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösningsmängd

Definition (Lösningsmängd)

Mängden av alla lösningar till ett ekvationssystem kallas ekvationens lösningsmängd.

Exempel

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{cases}$$

- Varje ekvation är ekvationen för ett plan i rummet.
- Punkter som uppfyller båda ekvationerna ligger på båda planen, dvs ligger i skärningen av planen.
- I det här fallet är planen ej parallella, utan skär varandra i en linje $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(0, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lösningsmängd och radoperationer

När vi löser ekvationssystem är vi egentligen intresserade av lösningsmängden och inte i ekvationerna i sig.
Vi kan göra föjande operationer på ett linjärt ekvationssystem utan att ändra lösningsmängden:

1. Addera en multipel av en ekvation till en annan,
2. Multiplicera en ekvation med ett tal $a \neq 0$,
3. Byta plats på två ekvationer.

Exempel

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 4x &= 4 \end{cases}$$

$$\overset{2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ x &= 1 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2y + z &= 2 \\ x &= 1 \end{cases}$$

Gausselimination

Gausselimination är ett systematiskt sätt att reducera ett linjärt ekvationssystem – eller en matris – till enklast möjliga form för att sedan kunna läsa av lösningsmängden.

- Börja med första kolonnen.
- Om kolonnen inte är helt noll, se till att första raden inleds med en etta – ledande etta – (detta görs med radoperationer av typ 2 och 3)
- Eliminera alla element under den ledande ettan med radoperationer av typ 1.
- Repetera för nästa kolonn, och bortse från tidigare kolonner och rader om de redan innehåller en ledande etta.

Trappstegsform

När vi är klara med Gausseliminationen har vi fått totalmatrisen för systemet på trappstegsform (trappform i boken).

Exempel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Varje nollskild rad inleds med en ledande etta som första nollskilda element.
- De ledande ettorna står längre till höger ju längre ned vi läser.
- Eventuella nollrader står längst ned.

Lösning från matris på trappstegsform

När vi har totalmatrisen på trappstegsform kan vi läsa av lösningsmängden genom:

- Kolonnerna som saknar ledande ettor motsvarar fria variabler
- De variabler som har ledande ettor i sina kolonner kan lösas ut och yttryckas i de övriga.
- Vi kan bortse från nollrader.

Lösning från matris på trappstegsform - exempel

Exempel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right)$$

- x_2 är en fri variabel och vi låter $x_2 = t$ för en parameter t.
- x_4 kan lösas ut ur den tredje ekvationen och vi får $x_4 = 5$.
- x_3 kan lösas ut ur den andra ekvationen och vi får $x_3 = 1 - 3x_4 = 1 - 3 \cdot 5 = -14$.
- x_1 kan lösas ut ur första ekvationen och vi får $x_1 = -2 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 + 2t - (-14) - 4 \cdot 5 = 2t - 8$.

Lösningsmängdens olika karaktärer

Det finns tre huvudtyper av lösningsmängder vi kan få från ett linjärt ekvationssystem:

- En unik lösning – det finns precis en ledande etta för varje variabel
- Oändligt många lösningar – vi inför en parameter för varje variabel som inte har ledande etta.
- Inga lösningar – ekvationssystemet är inkonsistent och har en ledande etta i högerkolonnen.

Definition (Dimension)

Om lösningsmängden är oändlig kan vi tala om dess dimension som ges av antalet parametrar i lösningen.